

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2013	CONVOCATORIA: JULIO 2013
MATEMÀTIQUES II	MATEMÁTICAS II

**BAREM DE L'EXAMEN:** Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.

Cada problema puntua fins a 10 punts.

La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.

Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).

S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

**BAREMO DEL EXAMEN:** Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).

Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

### OPCIÓ A

**Problema A.1.** Comproveu raonadament, escriuint tots els passos del raonament utilitzat, que:

a) Si el producte de dues matrius quadrades  $A$  i  $B$  és commutatiu, és a dir, que  $AB = BA$ , llavors es dedueix que  $A^2B^2 = (AB)^2$ . (2 punts).

b) Que la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$  satisfà la relació  $A^2 - 3A + 2I = O$ , sent  $I$  i  $O$ , respectivament, les

matrius d'ordre  $3 \times 3$  unitat i nul·la, (4 punts), i que una matriu  $A$  tal que  $A^2 - 3A + 2I = O$  té matriu inversa. (2 punts)

c) Calculeu raonadament, escriuint tots els passos del raonament utilitzat, els valors  $\alpha$  i  $\beta$  que fan que  $A^3 = \alpha A + \beta I$ , sabent que la matriu  $A$  verifica la igualtat  $A^2 - 3A + 2I = O$ . (2 punts).

**Problema A.2.** Tenim les rectes  $r_1: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$  i  $r_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$ , sent  $\alpha$  i  $\beta$  paràmetres reals.

Calculeu raonadament, escriuint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Unes equacions implícites de  $r_1$ . (2 punts).

b) La justificació que les rectes  $r_1$  i  $r_2$  estan contingudes en un plànel  $\pi$  (2 punts) i l'equació d'aquest plànel  $\pi$ . (2 punts).

c) L'àrea del triangle de vèrtexs  $P$ ,  $Q$  i  $R$ , sent  $P = (-1, 0, 1)$ ,  $Q = (0, 1, 2)$  i  $R$  el punt d'intersecció de  $r_1$  i  $r_2$ . (4 punts).

**Problema A.3.** Es donen les funcions  $f(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  i  $g(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ . Determineu raonadament,

escriuint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Les derivades de  $f(x)$  i  $g(x)$ . (4 punts).

b) Els dominis de definició de les funcions  $f(x)$  i  $g(x)$ . (3 punts).

c) L'expressió simplificada de la funció  $f(x) + g(x)$ , (1,5 punts), i el recorregut d'aquesta funció  $f(x) + g(x)$ . (1,5 punts).

## OPCIÓ B

**Problema B.1.** Es dona el sistema d'equacions 
$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1, \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$$
 on  $\alpha$  és un paràmetre real.

Calculeu **raonadament**, **escriuint tots els passos del raonament utilitzat**:

- Totes les solucions del sistema quan  $\alpha = 7$ . (4 punts).
- Els valors de  $\alpha$  per als quals el sistema és compatible indeterminat. (3 punts).
- Els valors de  $\alpha$  per als quals el sistema és compatible determinat. (3 punts).

**Problema B.2.** Es donen les rectes  $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$  i  $s : \{x - 1 = y - 2 = z\}$ . Determineu **raonadament**,

**escriuint tots els passos del raonament utilitzat**:

- Un punt i un vector director de cadascuna de les dues rectes. (3 punts).
- La distància entre les rectes  $r$  i  $s$ , (2 punts), **justificant** que les rectes  $r$  i  $s$  es creuen. (2 punts).
- Unes equacions de la recta  $t$  que passa pel punt  $\left(\frac{41}{57}, -\frac{14}{57}, 0\right)$  i és perpendicular a les rectes  $r$  i  $s$ . (3 punts).

**Problema B.3.** En el plànol  $XY$  està dibuixada una parcel·la  $A$  els límits de la qual són dos carrers d'equacions  $x = 0$  i  $x = 40$ , respectivament, una carretera d'equació  $y = 0$ , i el tram del curs d'un riu, d'equació

$$y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}, \quad \text{amb } 0 \leq x \leq 40, \text{ sent positiu el signe de l'arrel quadrada.}$$

Es pretén urbanitzar un rectangle  $R$  inscrit en la parcel·la  $A$ , de manera que els vèrtexs de  $R$  siguin els punts  $(x, 0)$ ,  $(x, f(x))$ ,  $(40, f(x))$  i  $(40, 0)$ .

Calculeu **raonadament**, **escriuint tots els passos del raonament utilitzat**:

- L'àrea de la parcel·la  $A$ . (3 punts).
- Els vèrtexs del rectangle  $R$  al qual correspon l'àrea màxima. (5 punts).
- El valor d'aquesta àrea màxima. (2 punts).

**PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT**

**PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD**

<b>CONVOCATÒRIA: JULIOL 2013</b>	<b>CONVOCATORIA: JULIO 2013</b>
<b>MATEMÀTIQUES II</b>	<b>MATEMÁTICAS II</b>

**BAREM DE L'EXAMEN:** Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.

Cada problema puntua fins a 10 punts.

La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.

Cada estudiant pot disposar d'una calculadora científica o gràfica. Se'n prohibeix la utilització indeguda (guardar fórmules o text en memòria).

S'use o no la calculadora, els resultats analítics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

**BAREMO DEL EXAMEN:** Se elegirá solo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria).

Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

### OPCIÓN A

**Problema A.1.** Comprobar razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado que:

a) Si el producto de dos matrices cuadradas  $A$  y  $B$  es conmutativo, es decir que  $AB = BA$ , entonces se deduce que  $A^2B^2 = (AB)^2$ . (2 puntos).

b) Que la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$  satisface la relación  $A^2 - 3A + 2I = O$ , siendo  $I$  y  $O$ ,

respectivamente, las matrices de orden  $3 \times 3$  unidad y nula, (4 puntos), y que una matriz  $A$  tal que  $A^2 - 3A + 2I = O$  tiene matriz inversa. (2 puntos)

c) Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, los valores  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $A^3 = \alpha A + \beta I$ , sabiendo que la matriz  $A$  verifica la igualdad  $A^2 - 3A + 2I = O$ . (2 puntos).

**Problema A.2.** Se dan las rectas  $r_1: \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 - \alpha \end{cases}$  y  $r_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \beta \\ z = -1 - 2\beta \end{cases}$ , siendo  $\alpha$  y  $\beta$  parámetros reales.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones implícitas de  $r_1$ . (2 puntos).

b) La justificación de que las rectas  $r_1$  y  $r_2$  están contenidas en un plano  $\pi$ , (2 puntos) y la ecuación de ese plano  $\pi$ . (2 puntos).

c) El área del triángulo de vértices  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , siendo  $P = (-1, 0, 1)$ ,  $Q = (0, 1, 2)$  y  $R$  el punto de intersección de  $r_1$  y  $r_2$ . (4 puntos).

**Problema A.3.** Se dan las funciones  $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  y  $g(x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ . Obtener razonadamente,

escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las derivadas de  $f(x)$  y  $g(x)$ . (4 puntos).

b) Los dominios de definición de las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ . (3 puntos).

c) La expresión simplificada de la función  $f(x) + g(x)$ , (1,5 puntos), y el recorrido de esta función  $f(x) + g(x)$ . (1,5 puntos).

## OPCIÓN B

**Problema B.1.** Se da el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1, \\ 3x + 5y + z = 1 \end{cases}$$
 donde  $\alpha$  es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- Todas las soluciones del sistema cuando  $\alpha = 7$ . (4 puntos).
- Los valores de  $\alpha$  para los que el sistema es compatible indeterminado. (3 puntos).
- Los valores de  $\alpha$  para los cuales el sistema es compatible determinado. (3 puntos).

**Problema B.2.** Se dan las rectas  $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$  y  $s : \{x - 1 = y - 2 = z$ . Obtener **razonadamente**,

**escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- Un punto y un vector director de cada una de las dos rectas. (3 puntos).
- La distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ , (2 puntos), **justificando** que las rectas  $r$  y  $s$  se cruzan. (2 puntos).
- Obtener unas ecuaciones de la recta  $t$  que pasa por el punto  $\left(\frac{41}{57}, -\frac{14}{57}, 0\right)$  y es perpendicular a las rectas  $r$  y  $s$ . (3 puntos).

**Problema B.3.** En el plano  $XY$  está dibujada una parcela  $A$  cuyos límites son dos calles de ecuaciones  $x = 0$  y  $x = 40$ , respectivamente, una carretera de ecuación  $y = 0$ , y el tramo del curso de un río de ecuación

$$y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}, \quad \text{con } 0 \leq x \leq 40, \text{ siendo positivo el signo de la raíz cuadrada.}$$

Se pretende urbanizar un rectángulo  $R$  inscrito en la parcela  $A$ , de manera que los vértices de  $R$  sean los puntos  $(x, 0)$ ,  $(x, f(x))$ ,  $(40, f(x))$  y  $(40, 0)$ .

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- El área de la parcela  $A$ . (3 puntos).
- Los vértices del rectángulo  $R$  al que corresponde área máxima. (5 puntos).
- El valor de dicha área máxima. (2 puntos).