MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA **SEPTIEMBRE 2011 A**
PROBLEMA 7

Problema A.1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y M, donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica $M^2=M$. Obtener **razonadamente**:

a) Todos los valores reales k para los que la matriz $B=A-kI$ tiene inversa. (*2 puntos*).

b) La matriz inversa B^{-1} cuando $k=3$. (*2 puntos*).

c) Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha A^2+\beta A=-2I$. (*4 puntos*).

d) Comprobar **razonadamente** que la matriz $P=I-M$ cumple las relaciones:

$$P^2=P \qquad \text{y} \qquad MP=PM.$$

(*2 puntos, repartidos en 1 punto por cada igualdad*).

a) $B=A-kI=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k & -2\\ 1 & 3-k\end{pmatrix}$

$|B|=-k(3-k)-(-2)=k^2-3k+2\overset{?}{=}0\to k=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$

$\to B^{-1}$ existe si $k\neq 1,2$

b) $k=3\to B=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad Adj(B)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\to(Adj(B))^t=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$

$|B|=2$

$\to B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1/2 & -3/2\end{pmatrix}$

c) $\alpha A^2+\beta A=-2I$ $\qquad \alpha\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$\alpha\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 3 & 7\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-2\alpha & -6\alpha-2\beta\\ 3\alpha+\beta & 7\alpha+3\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}-2\alpha=-2\\ -6\alpha-2\beta=0\\ 3\alpha+\beta=0\\ 7\alpha+3\beta=-2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\to\alpha=1\\ \to\beta=-3\\ \to\checkmark\\ \to\checkmark\end{array}$$

d) $P^2=(I-M)^2=(I-M)(I-M)=I-M-M+M^2\overset{M^2=M}{=}I-M-M+M=I-M=P$

$$\left.\begin{array}{l}MP=M(I-M)=M-M^2=M-M=0\\ PM=(I-M)\cdot M=M-M^2=M-M=0\end{array}\right\}\text{COINCIDE}$$