

**Problema A.1.** Dado el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} x+3y+2z = -1 \\ 2x+4y+5z = k-2 \\ x+k^2y+3z = 2k \end{cases}$ , donde  $k$  es un parámetro real se pide:

- Discutir razonadamente el sistema según los valores de  $k$ . (4 puntos).
- Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, todas las soluciones del sistema cuando  $k = -1$ . (3 puntos).
- Resolver razonadamente el sistema cuando  $k = 0$ . (3 puntos).

a)  $A' = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & k-2 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \end{array} \right)$   $|A| = 12 + 15 + 4k^2 - (8 + 5k^2 + 18) = -k^2 + 1 \stackrel{?}{=} 0 \quad k = \pm 1$

$A$

Si:  $k \neq \pm 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg } A = 3$   
 Como  $A \subset A'$  y  $\text{rg } A' \leq 3 \rightarrow \text{rg } A' = 3$   
 n: incógnitas = 3  $\rightarrow$  Rouché: S.C.D.

Si:  $k = 1 \rightarrow A' = \left( \begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & \textcircled{-2} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$   $\text{rg } A = 2 \neq 3 = \text{rg } A'$   
 $\rightarrow$  Rouché: S.I.

Si:  $k = -1 \rightarrow A' = \left( \begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right)$   $\text{rg } A = \text{rg } A' = 3 \neq 2 = \text{n: incógnitas}$   
 $\rightarrow$  Rouché: S.C.I.

b)  $k = -1 \Rightarrow$  Retomamos el sistema del apartado anterior:

$$\left. \begin{array}{l} x+3y+2z = -1 \\ -2y+z = -1 \end{array} \right\} y = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$z = 2\lambda - 1 \quad x + 3\lambda + 2(2\lambda - 1) = -1$$

$$x + 3\lambda + 4\lambda - 2 = -1$$

$$x = -7\lambda + 1$$

c)  $k = 0 \Rightarrow A' = \left( \begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$

$$\left. \begin{array}{l} x+3y+2z = -1 \\ -2y+z = 0 \\ -y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow x - 3 - 4 = -1 \rightarrow x = 6$$

$$\rightarrow -2(-1) + z = 0 \rightarrow z = -2$$

$$\rightarrow y = -1$$