

MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA
PROBLEMA 21

JUNIO 2015 A

Problema A.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Obtener razonadamente, escribiendo

todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La matriz inversa de la matriz A . (2 puntos)
- Las matrices X e Y de orden 2×2 tales que $XA = B$ y $AY = B$. (2 + 2 puntos)
- Justificar razonadamente que si M es una matriz cuadrada tal que $M^2 = I$, donde I es la matriz identidad del mismo orden que M , entonces se verifica la igualdad $M^3 = M^7$. (4 puntos)

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8 \neq 0 \quad \exists A^{-1}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A))^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ -1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$b) X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2-6 & 3+3 \\ 4-4 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$AY = B \rightarrow A^{-1} \cdot AY = A^{-1} \cdot B \rightarrow$$

$$Y = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2+6 & 6-6 \\ -2+2 & -6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) M^2 = I$$

$$\Rightarrow M^3 = M \cdot M^2 = M \cdot I = M$$

$$M^7 = M \cdot M^2 \cdot M^2 \cdot M^2 = M \cdot I \cdot I \cdot I = M$$