

MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA
PROBLEMA 22

JUNIO 2015 B

Problema B.1. Se da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (1-\alpha)x + (2\alpha+1)y + (2\alpha+2)z = \alpha \\ \alpha x + \alpha y = 2\alpha+2, \\ 2x + (\alpha+1)y + (\alpha-1)z = \alpha^2 - 2\alpha + 9 \end{cases}$$

donde α es un parámetro real. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- a) Todas las soluciones del sistema cuando $\alpha = 1$. (3 puntos)
- b) **La justificación razonada** de si el sistema es compatible o incompatible cuando $\alpha = 2$. (3 puntos)
- c) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 puntos)

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2\alpha+1 & 2\alpha+2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 2\alpha+2 \\ 2 & \alpha+1 & \alpha-1 & \alpha^2-2\alpha+9 \end{array} \right)$$

A

a) $\alpha=1 \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{array} \right)$ $S.C.I.$

$$\left. \begin{array}{l} 3y+4z=1 \\ x+y=4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y=\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ x=4-\lambda \end{array} \quad \begin{array}{l} 3\lambda+4z=1 \\ z = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\lambda \end{array}$$

b) $\alpha=2 \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{array} \right)$ $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & -52 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{array} \right)$ $\left. \begin{array}{l} r_g A = 2 \\ r_g A' = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Rouché: S.I.}$

A

c) $|A| = (1-\alpha) \cdot \alpha (\alpha-1) + \alpha (\alpha+1)(2\alpha+2) - (2\alpha(2\alpha+2) + \alpha(2\alpha+1)(\alpha-1))$

$$= (\alpha - 1 - \alpha^2 + \alpha) \cdot \alpha + (2\alpha^2 + 2\alpha + 2\alpha + 2)\alpha - (4\alpha^2 + 4\alpha + (2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha - 1)\alpha)$$

$$= (-\alpha^2 + 2\alpha - 1)\alpha + (2\alpha^2 + 4\alpha + 2)\alpha - (4\alpha^2 + 4\alpha + (2\alpha^2 - \alpha - 1)\alpha)$$

$$= -\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha + 2\alpha^3 + 4\alpha^2 + 2\alpha - 4\alpha^2 - 4\alpha - 2\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$$

$$= -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha(-\alpha^2 + 3\alpha - 2) = 0$$

$\alpha=0$
 $\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \rightarrow \frac{1}{2}$

\Rightarrow Si $\alpha \neq 1, 2 \rightarrow |A| \neq 0, r_g A = 3$
 Como $A \subset A'$ y $r_g A' \leq 3 \Rightarrow r_g A' = 3$
 n° incógnitas = 3 \rightarrow Por Rouché: S.C.D.