

MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA
PROBLEMA 24

JULIO 2015 B

Problema B.1. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Obtener razonadamente,

escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de x para los cuales la matriz B tiene inversa. (3 puntos)
- b) El valor del determinante de las matrices A^3 y $\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$, sabiendo que el valor del determinante de la matriz A es 8. (4 puntos)
- c) Los valores de x, y, z para los cuales $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. (3 puntos)

a) $|B| = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - (3x) = -1 - 3x = 0 \rightarrow x = -1/3 \Rightarrow \text{Si } x \neq -1/3 \exists B^{-1}$

b) $|A^3| = |A|^3 = 8^3 = 512$

$\begin{vmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10|A| = 10 \cdot 8 = 80$

c) $\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y-z & x+2-1 & -x+3 \\ xy+2y+3z & y+4+3 & -y+6 \\ xz+y & z+2 & -z+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} x^2+y-z=0 & \rightarrow (-1)^2+0-1=0 \checkmark \\ x+1=0 & \rightarrow x=-1 \\ -x+3=4 & \rightarrow x=-1 \\ xy+2y+3z=3 & \rightarrow (-1)\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = 3 \checkmark \\ y+7=7 & \rightarrow y=0 \\ -y+6=6 & \rightarrow y=0 \\ xz+y=-1 & \rightarrow (-1)\cdot 1 + 0 = -1 \checkmark \\ z+2=3 & \rightarrow z=1 \\ -z+3=2 & \rightarrow z=1 \end{cases}$

Solución:
 $x = -1$
 $y = 0$
 $z = 1$