

MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA
PROBLEMA 34

JUNIO 2018 B

Problema B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$ (3 puntos).
 b) Los valores de α y β para los cuales $A^4 = \alpha A + \beta I$ (4 puntos).
 c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2 (3 puntos).

a) $A^2 + 2A = 3I$

$$\frac{1}{3}A^2 + \frac{2}{3}A = I$$

$$A\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I\right) = I \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$$

$$a = \frac{1}{3} \quad b = \frac{2}{3}$$



b) $A^2 + 2A = 3I \rightarrow A^2 = 3I - 2A$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (3I - 2A)(3I - 2A) = 9I - 6A - 6A + 4A^2$$

$$= 9I - 12A + 4A^2 = 9I - 12A + 4(3I - 2A) =$$

$$= 9I - 12A + 12I - 8A = -20A + 21I$$

$$\alpha = -20 \quad \beta = 21$$

c) $|2B^{-1}| = 2^3 |B^{-1}| = 8 \cdot \frac{1}{|B|} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$

extraemos un 2 de cada fila