

MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA
PROBLEMA 39

JULIO 2019 A

Problema A.1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x & +3z = \alpha \\ x & -2y +2z = 5 \\ 3x & -y +5z = \alpha + 1 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 puntos)
 b) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 puntos)
 c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 puntos)

a) $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1 \end{array} \right)$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 0 - 3 - (-18 - 4 + 0) = -23 + 22 = -1 \neq 0$

A

Para todo valor de α $|A| \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 3$
 Como $A \subset A'$, $\text{rg} A' \leq 3 \rightarrow \text{rg}(A') = 3$ Rouché
S.C.D
 $n' \text{ in } = 3$

b) $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right)$ $\sim_{F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim_{F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -8 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{array} \right)$

A

$\sim_{\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & 0 \\ -10 & 0 & -16 & 10 \\ 10 & 0 & 15 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & 0 \\ -10 & 0 & -16 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right)$

$\rightarrow \begin{cases} 3x - y + 5z = 0 \\ -10x - 16z = 10 \\ -z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 21 - 4 - 25 = 0 \rightarrow y = -4 \\ \rightarrow -10x + 80 = 10 \rightarrow x = 7 \\ \rightarrow z = -5 \end{cases}$

$$c) \begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg } A = 3$$

$$\text{r. l. n. ü.} = 3$$

$$\Rightarrow \text{? } \text{rg } A' = 3 \text{ ?}$$

$$\boxed{|A'| = 0} \rightarrow \text{rg } A' = 3$$