

MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA
PROBLEMA 42

JULIO 2020 B

Problema 4. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 puntos)
 b) Los valores de b para que la matriz $A^T A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A . (3 puntos)
 c) La inversa de $A^T A$, cuando dicha inversa exista. (4 puntos)

$$a) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 0+2b & 2-2 \\ -b+0 & 0+0 & 2b-0 \\ 1-2 & 0+2b & -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

$3 \times 2 \quad 2 \times 3$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{vmatrix} = -4b^2 - \underbrace{(-12b^2 + 8b^2)}_{-4b^2} = 0$$

AB No tiene inversa para ningún valor de b , porque su determinante es nulo siempre.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0-2 & -2+0+4 \\ -1+b^2+1 & -2+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \quad 3 \times 2$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 2b^2 \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow b = \pm\sqrt{6}$$

$\rightarrow BA$ admite inversa si $b \neq \pm\sqrt{6}$

$$b) \quad A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+b^2+1 & 2+0-2 \\ 2+0-2 & 4+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|A^T \cdot A| = \begin{vmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8(b^2+2) \stackrel{?}{=} 0 \quad \cancel{\neq} \quad A^T \cdot A \text{ admite inversa siempre, para cualquier valor de } b.$$

$b^2+2=0$
 $b^2=-2$

$$c) \quad \text{Adj}(A^T \cdot A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix} \rightarrow (\text{Adj}(A^T \cdot A))^T = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix} \rightarrow (A^T \cdot A)^{-1} = \frac{1}{8(b^2+2)} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$