

MATEMÁTICAS II
ÁLGEBRA
PROBLEMA 47

JULIO 2021

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$, donde m es un parámetro real. Se pide:

- a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m . (4 puntos)
- b) La solución del sistema cuando $m = 1$. (3 puntos)
- c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

a) $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & m & m \end{array} \right)$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix} = 2m - 15 - 4 - (5 - 24 - m) = 3m$
 $3m = 0 \rightarrow m = 0$

• Si $m \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = 3$
 $ACA', \text{rg } A' \leq 3 \rightarrow \text{rg}(A') = 3$
 $n^\circ \text{ incógnitas} = 3$ \rightarrow Rouché S.C.D.

• Si $m = 0 \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\rightarrow \text{rg } A = \text{rg } A' = 2$ \rightarrow Rouché S.C.I.
 $n^\circ \text{ incógnitas} = 3$

b) $m = 1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -x = -3 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 - 3 + z = 1 \rightarrow z = -2 \\ x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$

c) Retomamos $m=0$ en la discusión:

$$A' \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ -5 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -5x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$x = \lambda \rightarrow -5\lambda + 4y = 0$$

$$y = \frac{5\lambda}{4}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$2\lambda - \frac{5\lambda}{4} + z = 0 \rightarrow z = -\frac{3\lambda}{4}$$