

**MATEMÁTICAS II**  
**GEOMETRÍA**  
**PROBLEMA 13**

**JUNIO 2013 A**

**Problema A.2.** Sean  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (2, 1, 0)$  y  $C = (0, 2, 3)$ . Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- El área del triángulo de vértices  $O, A$  y  $B$ , (3 puntos) y el volumen del tetraedro de vértices  $O, A, B$  y  $C$ . (2 puntos).
- La distancia del vértice  $C$  al plano que contiene al triángulo  $OAB$ . (3 puntos).
- La distancia del punto  $C'$  al plano que contiene al triángulo  $OAB$ , siendo  $C'$  el punto medio del segmento de extremos  $O$  y  $C$ . (2 puntos).

a)

$$\text{Área}_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |\vec{OA} \times \vec{OB}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-1, 2, 1)| = \frac{1}{2} \sqrt{1+4+1} = \frac{\sqrt{6}}{2} u^2$$

$$\text{Volumen}_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |3+4+0-(0+0+0)| = \frac{7}{6} u^3$$

b) Plano  $\pi / O, A, B \in \pi$   $\vec{n}_{\pi} = \vec{OA} \times \vec{OB} = (-1, 2, 1)$   $\pi = -x + 2y + z + D = 0$   
 $O \in \pi \rightarrow D = 0$   
 $\pi = -x + 2y + z = 0$

$$d(C, \pi) = \frac{|0 + 4 + 3|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6} u$$

c)  $C' = \frac{C+O}{2} = (0, 1, 3/2)$

$$d(C', \pi) = \frac{|0 + 2 + 3/2|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{7/2}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{12} u$$

