

MATEMÁTICAS CCSS II
FUNCIONES
PROBLEMA 14

JUNIO 2013 B

Problema 2. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 3x-1 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de la función en todos los puntos del intervalo $[-2, 5]$.
- b) Calcula los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en el intervalo $[-2, \frac{5}{2}]$.
- c) Calcula $\int_1^2 f(x) dx$.

a) En cada uno de los tramos la función es continua por estar definida con polinomios. Veamos los puntos donde cambia de definición:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x+2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x + 2 = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ \rightarrow \text{Continua en } x=0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 2x + 2 = 9 - 6 + 2 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 3x - 1 = 9 - 1 = 8 \end{array} \right\} 5 \neq 8 \text{ Discontinua en } x=3$$

La función es continua en $[-2, 5] - \{3\}$. En $x=3$ presenta una discontinuidad de salto finito.

b) Representemos la función en $[-2, 5/2]$:

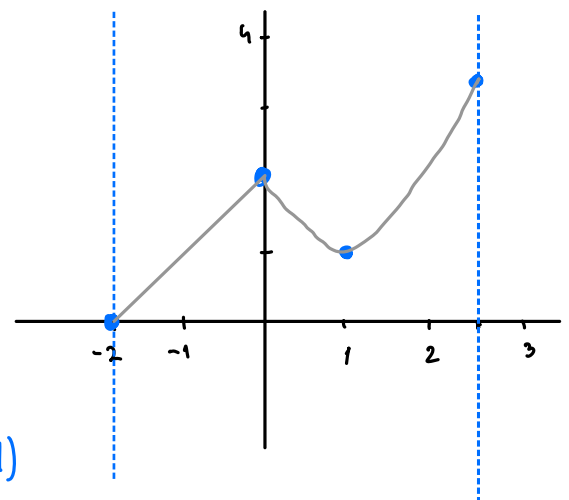
$$y = x+2 \quad y = x^2 - 2x + 2$$

x	y
-2	0
0	2

x	y
0	2
$2.5 = 5/2$	$13/4 = 3.25$

$$f(5/2) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 2 = \frac{25}{4} - 3 = \frac{13}{4} = 3.25$$

Vértice: $x = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow y = 1 - 2 + 2 = 1 \quad (1, 1)$



c) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 4 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 2 \right) = \frac{4}{3}$